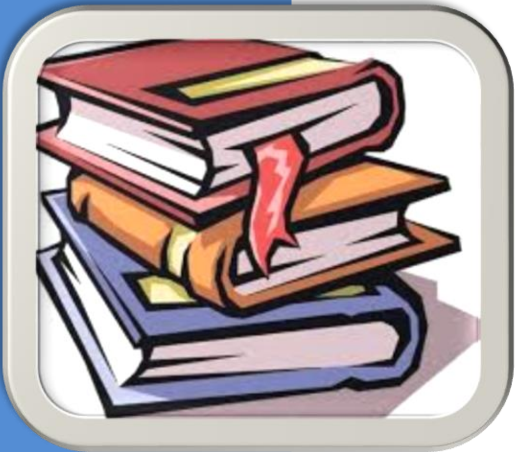
Тематичний набір з геометрії на тему: «ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ»



Навчально-виховний

комплекс 2016

Тематичний набір з геометрії на тему: «ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ»

Навчально-виховний комплекс 2016

Тематичний набір «Правильні многокутники» призначений для учнів 9-х класів. Запропонований теоретичний курс укладено за чинною навчальною програмою для загальноосвітніх шкіл та надає корисний матеріал для підготовки учня до успішного виконання завдань ДПА.

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ТЕМАТИЧНОГО НАБОРУ:

Воротинцева Л.І. – вчитель математики, директор КНВК

Лісняк В.М. – вчитель математики, керівник ШМО КНВК

Пуханова Л.С. – вчитель математики КНВК

Чернова Н.Г. – вчитель математики КНВК

Пономаренко О.О. – вчитель математики КНВК, розробник макета, художнього оформлення

Наша адреса: 85300, м. Покровськ, м-н Лазурний, Навчально-виховний комплекс

Телефон: (06239) 52-34-88

E-mail: knvk2015@i.ua

ПЕРЕДМОВА

Тематичний набір, який представлений до Вашої уваги, є частиною тематичних курсів з геометрії для учнів 9-х класів. Запропонований теоретичний курс укладено за чинною навчальною програмою для загальноосвітніх шкіл та надає корисний матеріал для підготовки учня до успішного виконання завдань ДПА.

Безперечною перевагою є те, що у даному курсі представлено не лише теоретичний матеріал, а й наведено методи розв'язування типових завдань та відповідні приклади. Більш того, матеріал поданий таким чином, що учні можуть використати його не тільки для вивчення нового матеріалу, але й для повторення перед складанням ДПА. Матеріал розташований у логічній послідовності.

Кожен урок курсу наповнений не тільки теоретичним матеріалом і прикладами виконання завдань, а також контрольними питаннями, перевірочними тестами, самостійними роботами. Тематичний курс закінчується контрольною роботою.

Як працювати з навчальними матеріалами курсу

Матеріал цього курсу розбито на 4 уроки.

На початку кожного уроку потрібно опрацювати короткі, але вичерпні теоретичні відомості, які проілюстровано достатньою кількістю прикладів, які наведені з повними розв’язаннями. Всі уроки мають контрольні питання, перевірочні тести, що виконуються для перевірки рівня засвоєння матеріалу. В кінці кожного уроку запропоновано виконати самостійну роботу, а в кінці курсу – контрольну роботу.

Запропонований посібник допоможе самостійно або за допомогою викладача опанувати навчальний матеріал та підготуватися до складання ДПА. У кожному уроці для закріплення теоретичних відомостей ми пропонуємо Вам опорні конспекти, що можуть бути сформовані Вами у довідники.

Пам’ятай! Відповідальне ставлення до дистанційного навчання має позитивний вплив: поліпшується самодисципліна, розвивається логічне мислення, аналітичні здібності. Те, що спочатку давалося важко, після кількох спроб займає зовсім небагато часу.

Тематичне планування з теми «ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ»

1	Означення правильного многокутника. Існування вписаного й описаного кіл
2	Формули радіусів вписаного й описаного кіл правильних многокутників
3	Побудова правильних многокутників.
4	Довжина кола й дуги кола. Площа круга та його частин.
5	Тематична контрольна робота «Правильні многокутники»

СТРУКТУРА КУРСУ

Щоб полегшити пошук інформації, а процес її засвоєння зробити більш живим і візуально чітким, ми ввели серію графічних знаків. Вони допоможуть акцентувати Вашу увагу на питаннях теми, рекомендованих висновках і областях застосування знань.

Нижче представлені умовні позначки, з якими Вам належить зустрітися на полях уроків.

Умовні позначки

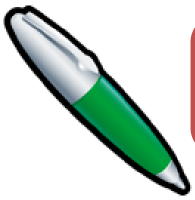
На полях уроків Ви зустрінетеся з наступними умовними позначеннями:

Теоретичний матеріал

Інформація, що заслуговує особливої уваги

Контрольні питання

Виконання тестів/математичного диктанту



Виконання самостійних або контрольних робіт

Корисні посилання на відеоматеріали

Натисніть Ctrl і клацніть на посилання

Час, відведений на виконання завдань

Перед опрацюванням даного курсу учень повинен знати:

- означення опуклого многокутника; його компоненти (сторона, внутрішній кут, зовнішній кут, діагональ);
- означення кола та круга; їх компоненти (центр кола(круга), радіус, діаметр, хорда кола(круга))
- означення вписаного і описаного многокутника;
- означення центрального та вписаного кутів кола.

Під час опрацювання курсу учень повинен вивчити:

- означення правильного многокутника;
- формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників;
- алгоритм побудови правильних многокутників;
- формули знаходження довжини кола, довжини дуги кола;
- формули знаходження площ круга та його частин.

Після опрацювання курсу учень повинен вміти:

- **описувати** круговий сектор і сегмент;
- **формулювати**: означення правильного многокутника; теореми: про відношення довжини кола до його діаметра; про площу круга;
- **записувати і пояснювати формули**: радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника; радіусів вписаного і описаного кіл правильного трикутника, чотирикутника (квадрата), шестикутника; довжини кола і дуги кола; площі круга, сектора і сегмента;
- **будувати** правильний трикутник, чотирикутник, шестикутник;
- **доводити формули** радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників;
- **застосовувати** вивчені означення і властивості до розв’язування задач.

Поради учню

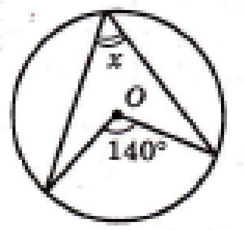
- Займайтеся щодня, присвячуючи роботі над матеріалами уроків не менше 30 хвилин в день.
- В процесі роботи над матеріалами курсу виконуйте всі практичні завдання.
- Обов'язково надсилайте домашні завдання на перевірку Вашому викладачу.
- Ретельно працюйте над помилками, зазначеними викладачем.
- Завершивши курс виконайте контрольну роботу за вивченою темою, що охоплює матеріал всього курсу.

ВХІДНИЙ КОНТРОЛЬ

1. Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна із них на 4 см менша від другої

А) 11см, 11см, 19 см, 19 см   Б) 28см, 28 см, 34см, 34см
В) 26 см, 26 см, 34 см, 34 см   В) 13 см, 13 см, 17 см, 17см

2. Знайдіть градусну міру кута *x* (точка О – центр кола)



А) 90°   Б) 80°   В) 45°   Г) 70°

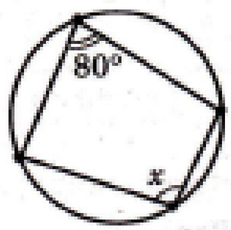
3. Трикутник АВС вписаний у коло, центр якого лежить на відрізку АВ. Знайдіть кут А, якщо ∠В=53°

А) 42°   Б) 90°   В) 37°   Г) 60°

4. Знайдіть периметр описаного чотирикутника, три послідовні сторони якого дорівнюють 3 см, 5 см, 9 см

А) 17 см   Б) 24 см   В) 32 см   Г) 34 см

5. Знайдіть градусну міру кута *x*



А) 160°   Б) 100°   В) 80°   Г) 20°

6. Трикутник АВС вписаний у коло, центр якого лежить на відрізку АВ. Знайдіть медіану, проведену з вершини С, якщо АВ=20 см

А) 5 см   Б) 13 см   В) 8 см   Г) 10 см

Відповіді до тесту:
1. В 2. Г 3. В 4. Б 5. Б 6. Г

УРОК 1

«ОЗНАЧЕННЯ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОКУТНИКА. ІСНУВАННЯ ВПИСАНОГО Й ОПИСАНОГО КІЛ»

Пригадай!

1. Сформулюйте означення многокутника; вершин многокутника; сторін многокутника; діагоналей многокутника.
2. Які многокутники вам відомі?
3. Скільки утворюється трикутників, якщо в n-кутнику ($n > 3$) провести всі його діагоналі з однієї вершини?
4. Що таке кут многокутника? зовнішній кут многокутника?
5. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
6. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого многокутника?
7. В опуклого многокутника всі зовнішні кути прямі. Який це многокутник?
8. Чи можна побудувати чотирикутник з двома прямими і двома тупими кутами?
9. Чи може найменший кут чотирикутника становити $91°$?
10. Чи можна побудувати опуклий п'ятикутник, усі кути якого прямі? Відповідь поясніть.

ОЗНАЧЕННЯ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОКУТНИКА

Правильним многокутником називається опуклий многокутник, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні.

Прикладами правильних многокутників є рівносторонній трикутник (рис. 1) і квадрат (рис. 2). На рисунку 3 зображений правильний шестикутник.

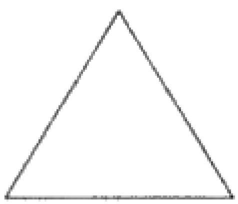


Рис. 1

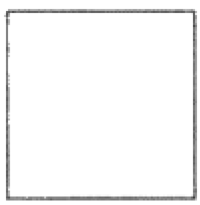


Рис. 2

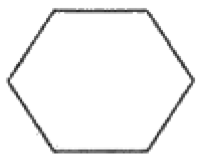


Рис. 3

Нехай α_n - внутрішній кут правильного т-кутника. Легко бачити, що

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

Наприклад, за цією формулою: кут правильного трикутника:

$$\alpha_3 = \frac{180°(3-2)}{3} = 60°,$$

правильного чотирикутника (квадрата):

$$\alpha_4 = \frac{180°(4-2)}{4} = 90°,$$

що узгоджується з відомим раніше.

Приклад 1. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його внутрішній кут дорівнює 150°.

Розв'язання. Маємо $\alpha_n = 150°$; $150° = (180°(n - 2))/n$; $150°n = 180°n - 360°$; $30°n = 360°$; $n = 12$. Отже, кількість сторін правильного многокутника дорівнює 12.

Приклад 2. Знайдіть периметр правильного многокутника, сторона якого дорівнює 4 см, а зовнішній кут на 108° менший за внутрішній.

Розв'язання. 1) Нехай внутрішній кут правильного многокутника дорівнює α_n, тоді зовнішній - α_n -108°.

2) Оскільки внутрішній і зовнішній кути многокутника є суміжними, то $\alpha_n + \alpha_n - 108° = 180°$; $2\alpha_n = 288°$; $\alpha_n = 144°$.

3) Маємо рівняння для кількості сторін n правильного многокутника $144° = (180°(n- 2))/n$. Звідки $n = 10$.

4) Периметр многокутника $P = 4 \cdot 10 = 40$ (см).

Приклад 3. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожний із зовнішніх його кутів дорівнює 36°?

Розв'язання. Оскільки $\frac{360°}{n} = 36°$, то $360 = 36n$; $n = 360 : 36$, $n = 10$.

Відповідь. 10 сторін.

ІСНУВАННЯ ВПИСАНОГО Й ОПИСАНОГО КІЛ

Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло. **Зауважимо, що:**

1) коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане у нього, мають один і той самий центр;

2) коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їх серединах.

Теорема. Навколо будь-якого правильного многокутника, можна описати коло, і в будь-який правильний многокутник можна вписати коло, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються.

Доведення

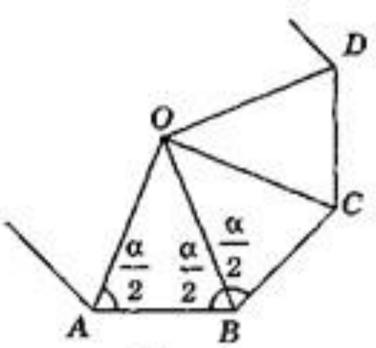


Рис. 4

Нехай A і B — дві сусідні вершини правильного многокутника (рис. 4).

Проведемо бісектриси кутів A і B, які перетинаються в точці O. Трикутник AOB — рівнобедрений ($\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де α — кут правильного многокутника). Сполучимо точку O з вершиною C, що є сусідньою з вершиною B. ΔABO = = ΔCBO (за першою ознакою рівності трикутників).

Із рівності трикутників випливає, що трикутник OBC — рівнобедрений з кутом $\angle C = \frac{\alpha}{2}$, тобто CO — бісектриса кута C.

Потім сполучимо точку O із вершиною D, що є сусідньою з вершиною C, і доводимо, що трикутник COD — рівнобедрений і DO — бісектриса кута D і т.д.

Отже, ΔABO = ΔBCO = ΔCDO = ... Усі ці трикутники мають рівні бічні сторони і рівні висоти, проведені до їхніх основ. Звідси випливає, що всі вершини многокутника лежать на колі з центром O і радіусом, що дорівнює бічним сторонам трикутників, а всі сторони многокутника дотикаються до кола з центром O і радіусом, що дорівнює висотам трикутників, проведеним із вершини O. *Теорему доведено.*

Слід зазначити, що з цієї теореми можна сформулювати такі наслідки.

1) Усі бісектриси кутів правильного многокутника перетинаються в одній точці, яка є центром описаного кола.

2) Усі серединні перпендикуляри, проведені до сторін правильного многокутника, перетинаються в одній точці, яка є центром вписаного кола.

3) Центри вписаного й описаного кіл у правильному многокутнику збігаються.

4) Відрізок, що сполучає центр правильного многокутника з серединою сторони многокутника, є радіусом вписаного кола. Цей відрізок називається апофемою правильного многокутника.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

- Який многокутник називається правильним?
- Який многокутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
- Чи завжди можна вписати коло в правильний многокутник? описати коло навколо правильного многокутника?

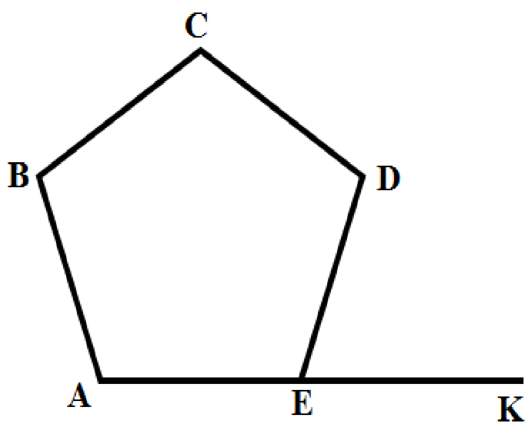
ТЕСТУВАННЯ №1

1. **Відрізки, що сполучають несусідні вершини многокутника називаються:**

а) сторонами б) діагоналями в) діаметрами

2. Якщо многокутник лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону, то він називається:

а) опуклим б) випуклим в) неопуклим г) невипуклим



3. Кут BAE називається:

а) суміжним
б) вертикальним
в) внутрішнім
г) зовнішнім

4. Кут DEK називається:

а) суміжним
б) вертикальним
в) внутрішнім
г) зовнішнім

5. Якщо з однієї вершини n-кутника провести всі діагоналі, то вони розіб'ють його на таку кількість трикутників:

а) n б) n-1 в) n-2 г) n-3

Відповіді до тесту:
1. Б 2. А 3. В 4. Г 5. В

САМОСТІЙНА РОБОТА №1

1) Скільки сторін має правильний многокутник, кожний із внутрішніх кутів якого дорівнює 135°?

2) Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожний із зовнішніх його кутів дорівнює 24°?

3) Доведіть, що взяті через одну вершини правильного 2п-кутника є вершинами правильного п-кутника.

20-30 хвилин

УРОК 2
«ФОРМУЛИ РАДІУСІВ ВПИСАНОГО І ОПИСАНОГО КІЛ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ»

Математичний диктант

Дано правильний n-кутник.

Варіант 1 (n = 4), варіант 2 (n = 6).

Знайдіть:

а) суму кутів многокутника;
б) внутрішній кут многокутника;
в) зовнішній кут многокутника;
г) центральний кут многокутника;
д) сторону многокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см;
є) апофему многокутника, якщо його сторона дорівнює 20 см.

Відповіді

Варіант 1. а) 360°; б) 90°; в) 90°; г) 90°; д) 6 см; є) 10 см.

Варіант 2. а) 720°; б) 120°; в) 60°; г) 60°; д) 4 см; є) $10\sqrt{3}$ см.

Виведення формул радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника

Нехай задано сторону a_n правильного n-кутника (рис. 1), знайдемо радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола.

Розглянемо трикутник AOB, у якому AB = a_n, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ як центральний кут правильного n-кутника.

Проведемо висоту OC цього трикутника, тоді

$$\angle AOC = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

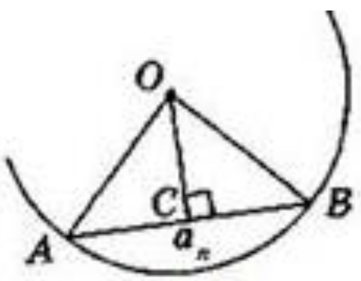


Рис. 1

Із трикутника AOC знаходимо:

$$R = AO = \frac{AC}{\sin \angle AOC} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = OC = \frac{AC}{tg\angle AOC} = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Отже, $R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$; $r = = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

Виведення формул радіусів вписаного і описаного кіл правильного трикутника, чотирикутника, шестикутника.

Виразимо радіуси описаного та вписаного кіл через сторону правильного трикутника, чотирикутника і шестикутника.

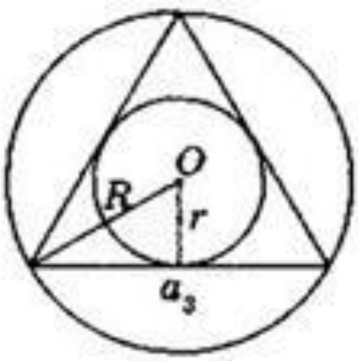


Рис. 2

Для правильного трикутника (рис. 2):

$$R=\frac{a_3}{2\sin\frac{180^\circ}{3}}=\frac{a_3}{2\sin 60^\circ}=\frac{a_3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a_3}{\sqrt{3}};$$

$$r=\frac{a_3}{2tg\frac{180^\circ}{3}}=\frac{a_3}{2tg60^\circ}=\frac{a_3}{2\sqrt{3}}.$$

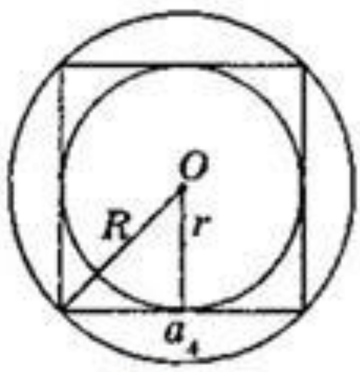


Рис. 3

Для правильного чотирикутника (рис. 3):

$$R=\frac{a_4}{2\sin\frac{180^\circ}{4}}=\frac{a_4}{2\sin 45^\circ}=\frac{a_4}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a_4}{\sqrt{2}};$$

$$r=\frac{a_4}{2tg\frac{180^\circ}{4}}=\frac{a_4}{2tg45^\circ}=\frac{a_4}{2}.$$

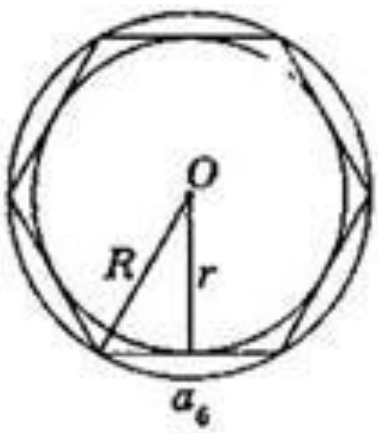


Рис. 4

Для правильного шестикутника (рис. 4):

$$R=\frac{a_6}{2\sin\frac{180^\circ}{6}}=\frac{a_6}{2\sin 30^\circ}=\frac{a_6}{2\cdot\frac{1}{2}}=a_6;$$

$$r=\frac{a_6}{2tg\frac{180^\circ}{6}}=\frac{a_6}{2tg30^\circ}=\frac{a_6}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{a_6\sqrt{3}}{2}.$$

Результати наших досліджень оформимо у вигляді таблиці

Таблиця 1

R, r	**n — довільне**	**n = 3**	**n = 4**	**n = 6**
R	$\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{a_4}{\sqrt{2}}$	a_6
r	$\dfrac{a_n}{2tg\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a_3}{2\sqrt{3}}$	$\dfrac{a_4}{2}$	$\dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$

ОПОРНА ЗАДАЧА

Виразіть сторону a_n правильного n-кутника через радіус R описаного навколо нього і радіус r вписаного в нього кола. Обчисліть a_n, якщо n = 3,4,6.

Результати розв'язування задачі можна оформити у вигляді таблиці.

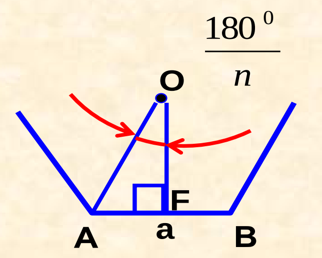
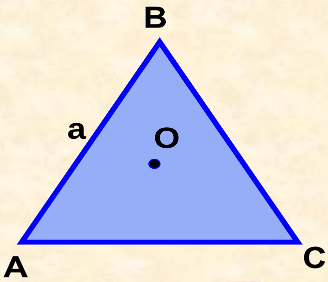
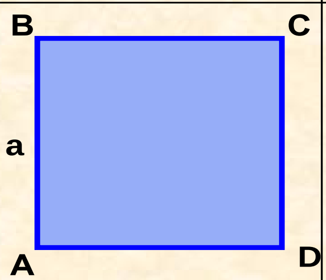
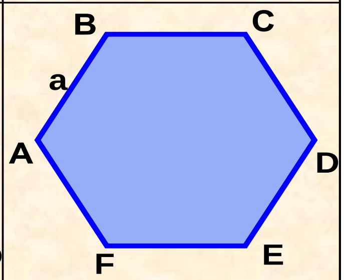
Таблиця 2

a_n	**R**	**r**
a_n	$2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$2r\,tg\dfrac{180^\circ}{n}$
a_3	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$
a_4	$R\sqrt{2}$	$2r$
a_6	R	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$

Блок-схеми з ілюстраціями

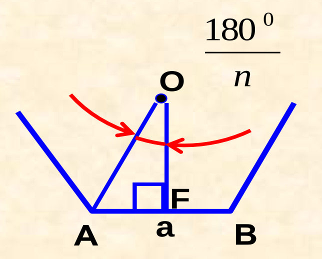
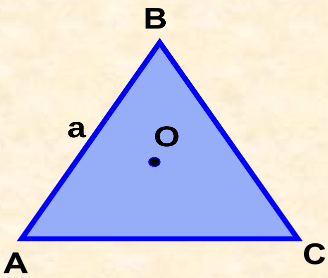
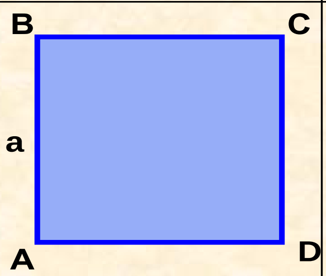
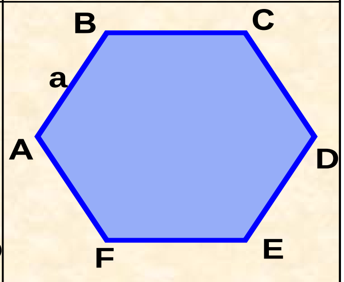
Правильні многокутники

1 Знайти R

n - кутник	трикутник	чотирикутник	шестикутник
			
$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$	$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R = a$

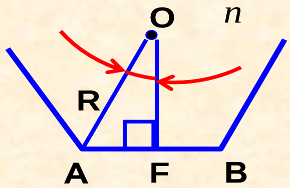
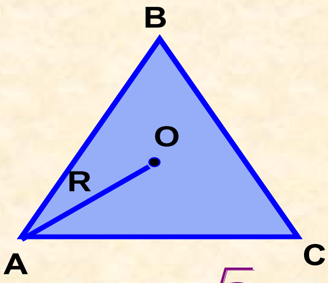
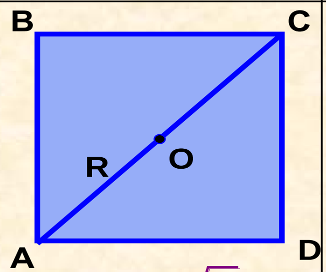
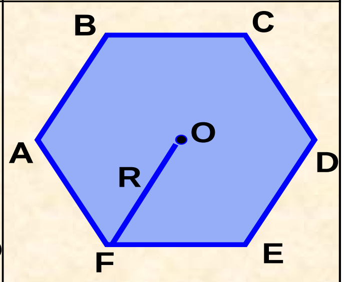
Правильні многокутники

2 Знайти r

n - кутник	трикутник	чотирикутник	шестикутник
			
$r = \frac{a}{2tg\frac{180^0}{n}}$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r = \frac{a}{2}$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

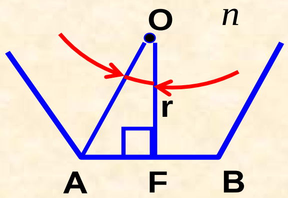
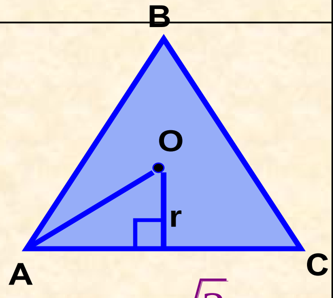
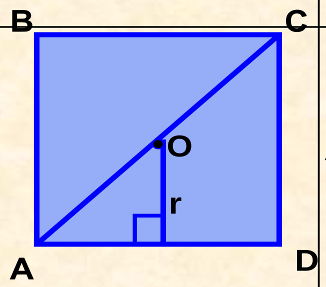
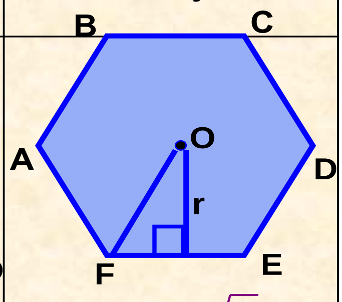
Правильні многокутники

3 Знайти а

n - кутник	трикутник	чотирикутник	шестикутник
$\frac{180^0}{n}$  $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$ $a = 2R\sin\frac{180^0}{n}$	 $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $a = \sqrt{3}R$	 $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $a = \sqrt{2}R$	 $R = a$ $a = R$

Правильні многокутники

4 Знайти а

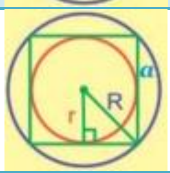
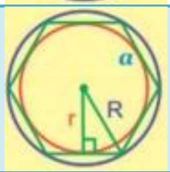
n - кутник	трикутник	чотирикутник	шестикутник
$\frac{180^0}{n}$  $r = \frac{a}{2tg\frac{180^0}{n}}$ $a = 2r \cdot tg\frac{180^0}{n}$	 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $a = 2\sqrt{3}r$	 $r = \frac{a}{2}$ $a = 2r$	 $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

Співвідношення між стороною правильного багатокутника і радіусами вписаного та описаного кіл

	r через a	*R через a*	*a через r*	*a через R*
три-кутник	$r = a/(2\sqrt{3})$	$R = a/\sqrt{3}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$r = a/2$	$R = a/\sqrt{2}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
шести-кутник	$r = \sqrt{3}a/2$	$R = a$	$a = 2r/\sqrt{3}$	$a = R$
n-кутник	$r = \dfrac{a}{2tg(180°/n)}$	$R = \dfrac{a}{2sin(180°/n)}$	$a = 2r tg(180°/n)$	$a = 2R sin(180°/n)$

Також через радіуси вписаних і описаних кіл можна знайти площу деяких правильних многокутників
(а – сторона; r – радіус вписаного кола; R – радіус описаного кола; S - площа)

	S через a	**S через r**	**S через R**
	$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$
	$S = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$

https://www.youtube.com/watch?v=GfDxHnrNDS4
https://www.youtube.com/watch?v=Je0zIWmLjvI

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

- У якого правильного многокутника радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного кола?
- Як знайти сторону квадрата, знаючи радіус його описаного кола?
- Чи може сторона правильного многокутника дорівнювати радіусу описаного кола?
- Як дістати рівність $a_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$?

ТЕСТУВАННЯ №2

1. Радіус кола,описаного навколо правильного n-кутника зі стороною а, знаходиться так:

А) $R = \dfrac{2 \cdot a}{\sin \frac{180^0}{n}}$ Б) $R = \dfrac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^0}{n}}$ В) $R = \dfrac{2 \cdot a}{tg \frac{180^0}{n}}$ Г) $R = \dfrac{a}{2 \cdot tg \frac{180^0}{n}}$

2. Радіус кола, вписаного у правильний семикутник зі стороною 6см, обчислюється за формулою:

А) $r = \dfrac{6}{tg \frac{180^0}{7}}$ Б) $r = \dfrac{7}{tg \frac{180^0}{6}}$ В) $r = \dfrac{6}{2 \cdot tg \frac{180^0}{7}}$ Г) $r = \dfrac{7}{2 \cdot tg \frac{180^0}{6}}$

3. Кожен кут правильного многокутника дорівнює 120 градусів. Скільки сторін має многокутник?

А) 4 Б) 6 В) 10 Г) 14

4. Радіус кола, вписаного в квадрат, дорівнює, дорівнює 4 см. Знайдіть квадрат діагоналі квадрата.

А) 128 см^2 Б) 64 см^2 В) 32 см^2 Г) 8 см2

5. Сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює 3 см. Знайти сторону правильного чотирикутника, описаного навколо кола.

А) 1,5 см. Б) 2,4 см. В) 3 см. Г) 6 см.

Відповіді до тесту:

1. Б 2. В 3. Б 4. А 5. Г

САМОСТІЙНА РОБОТА №2

1. Хорда, яка перпендикулярна до радіуса й проходить через його середину, дорівнює стороні правильного вписаного трикутника. Доведіть це.
2. У правильного трикутника радіус вписаного кола вдвічі менший за радіус описаного кола. Доведіть це.
3. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює a. Знайдіть сторону правильного шестикутника:

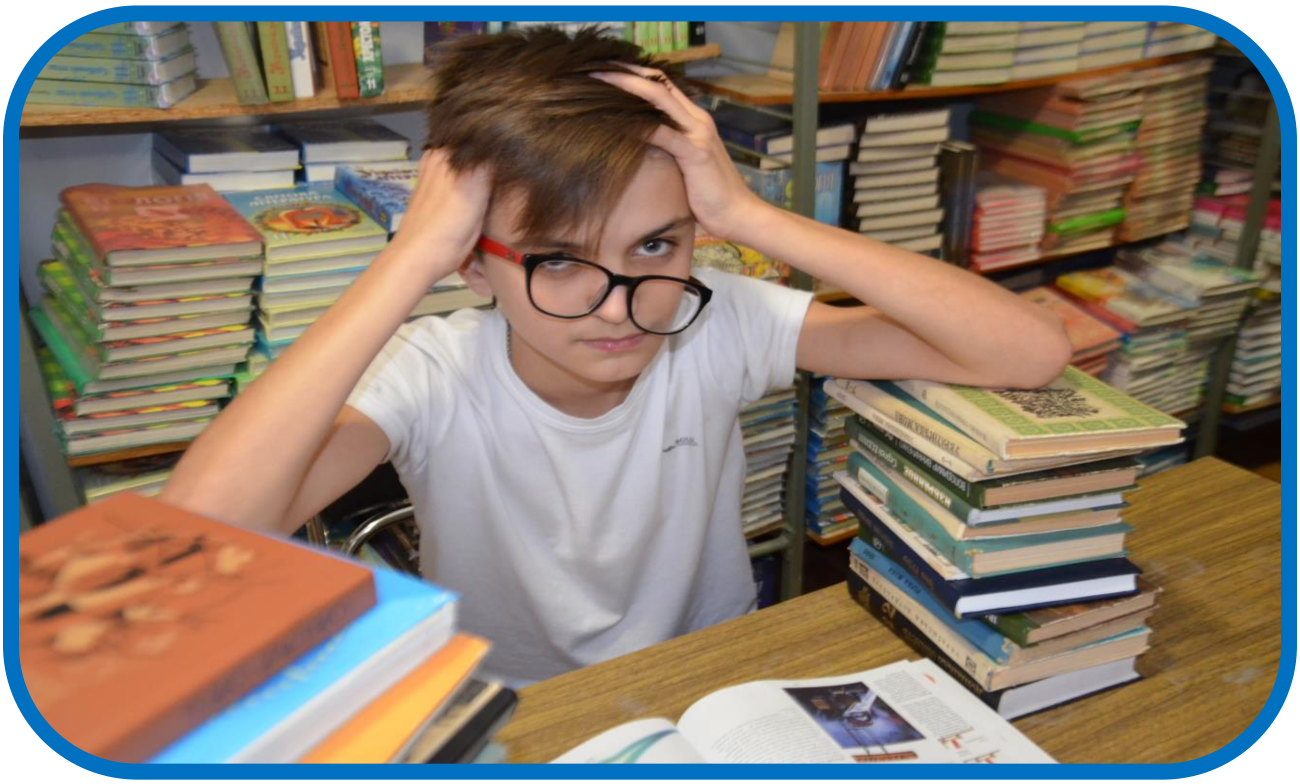
а) вписаного в це коло;

б) описаного навколо цього кола.

4. Доведіть, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.

20-30

хвилин



УРОК 3
«ПОБУДОВА ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ»

Правильні многокутники можна будувати за допомогою кола або циркуля і лінійки. В першому випадку достатньо поділити коло на n рівних дуг – точки ділення й будуть його вершинами, а в другому випадку необхідно побудувати центральний кут многокутника.

Наприклад, побудуємо правильний шестикутник. В правильному шестикутнику центральний кут дорівнює $\frac{360^0}{6}=60^0$. Вибираємо довільну точку кола (A_1) і відкладаємо хорди, довжиною радіуса (рис. 1). Дістаємо точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 та з’єднуємо їх відрізками.

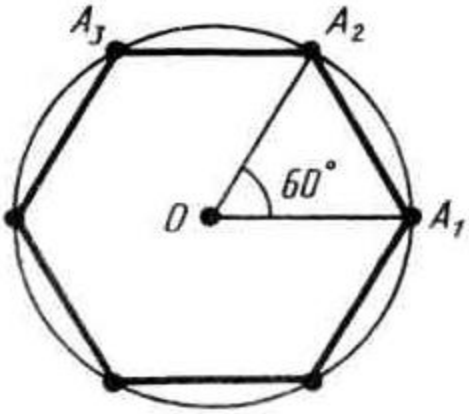


Рис. 1

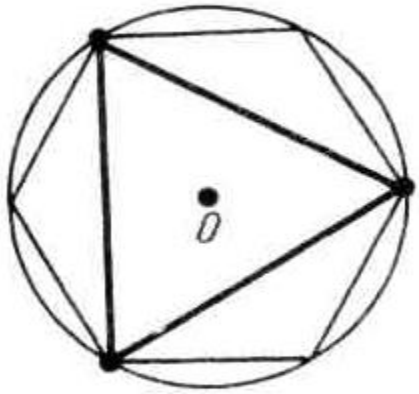


Рис. 2

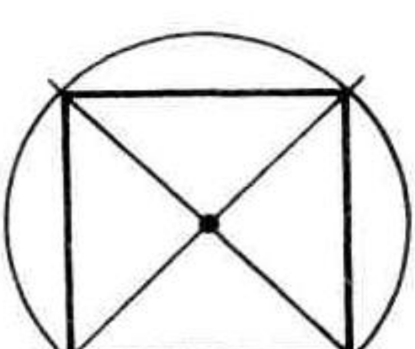


Рис. 3

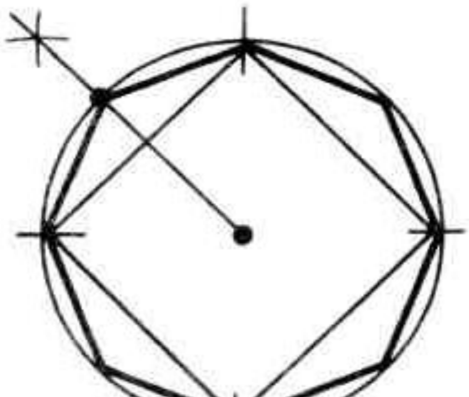


Рис. 4

Для побудувати правильного трикутника з'єднуємо через одну вершини правильного шестикутника (рис. 2).

Щоб побудувати правильний чотирикутник (квадрат), необхідно провести через центр кола дві взаємно перпендикулярні прямі. Точки перетину прямих і кола є вершинами квадрата (рис. 3).

Якщо в коло вписаний правильний n-кутник, тоді можна побудувати будь-який $2n$-кутник. Для цього кожну дугу ділимо навпіл. На рис. 4 показано побудову правильного восьмикутника. Вказана побудова називається подвоєнням правильного многокутника. Довжина сторони такого многокутника обчислюється за *формулою подвоєння* числа сторін правильного вписаного многокутника:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

де a_n - довжина сторони даного многокутника;

a_{2n} - довжина сторони подвоєного многокутника;

R - радіус кола.

Розглянемо приклад. Обчислимо довжину сторони правильного вписаного 12-кутника, взявши $R = 1$ і $a_6 = 1$:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{3},\ a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517...$$

Отже $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = R \cdot 0{,}517...$

Виникає питання: *на скільки рівних частин можна ділити коло за допомогою циркуля і лінійки?*

Вказана задача досліджувалася ще старогрецькими геометрами, а остаточно була розв'язана лише в 1801 році великим німецьким математиком **Карлом Гауссом.**

К. Гаусс, засобами алгебри, довів, що за допомогою циркуля і лінійки правильні n-кутники можна побудувати лише тоді, коли число n має наступне розкладення на множники:

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_q, \qquad (1)$$

де m - невід'ємне ціле число;

$p_1, p_2, ..., p_q$ - прості числа виду $2^{2^k} + 1$ (k - невід'ємне ціле число).

Отже, виявляється, що правильний п'ятикутник за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати, а семикутник не можна. Пояснюється це тим, що число 5 можна представити у вигляді $5 = 2^{2^1} + 1$. А число 7 не можна.

Наступне просте число виду $2^{2^k}+1$ для $k=2$ є 17. Задачу про побудову 17-кутника спочатку розв'язав саме Гаусс.

Поділити коло на будь-яке інше число рівних дуг, що не розкладається за формулою (1), можна тільки наближено. Наприклад, поділимо коло на 7 рівних частин. Обчислюємо величину центрального кута: $\frac{360^0}{7}=51\frac{3^0}{7}$. За допомогою транспортиру при центрі відкладаємо приблизно 51^0 і тоді дістанемо приблизно $\frac{1}{7}$ частину кола.

Наближене розбиття кола на будь-яку кількість рівних дуг використовується з давніх часів на практиці, зокрема при виготовлені орнаментів, астрономічних інструментів, циферблатів тощо.

Побудуємо правильний 10-кутник та визначимо довжину його сторони в залежності від радіуса.

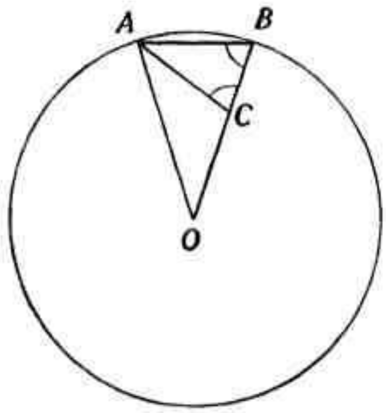


Рис. 5

Нехай хорда AB – сторона правильного 10-кутника, тоді $\angle AOB=36^0$, а $\angle A=\angle B=72^0$ (рис. 5). Будуємо бісектрису AC, значить $AC=CO$ і $AB=AC=CO$, так як $\angle ACB=\angle ABC=72^0$. За властивістю бісектриси кута маємо: $\frac{AO}{AB}=\frac{OC}{CB}$, звідки $\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{CB}$.

Якщо сторону правильного 10-кутника позначити через x, пропорцію можна переписати так: $\frac{R}{x}=\frac{x}{R-x}$.

Розв'язавши рівняння, дістанемо: $x=a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=R\cdot 0,61803...$.

Примітка. Для побудови правильного 5-кутника необхідно розбити коло на 10 рівних дуг, а потім точки розбиття з'єднати через одну хордами.

АЛГОРИТМ ПОБУДОВ ДЕЯКИХ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Вписаного в коло правильного трикутника

1. Побудуйте довільне коло.
2. Візьміть довільну точку на колі.
3. Не змінюючи відстані між олівцем та ніжкою циркуля, зробіть за-січки по колу.
4. З’єднайте отримані точки через одну.
5. Отримали правильний вписаний трикутник.

Правильного описаного навколо кола трикутника

1. Побудуйте правильний вписаний трикутник.
2. Проведіть до вершини трикутника радіуси кола.
3. Побудуйте дотичні до радіусів кола.
4. Отримали правильний описаний трикутник.

Правильного шестикутника вписаного в коло

1. Побудуйте довільне коло.
2. Відмітьте точку на колі.
3. Не змінюючи відстані між олівцем та ніжкою циркуля зробіть за-січки по колу.
4. Сполучіть отримані точки відрізками.
5. Отримали правильний вписаний шестикутник.

Описаного навколо кола шестикутника

1. Побудуйте правильний вписаний шестикутник.
2. Проведіть радіуси кола до вершин шестикутника.
3. Побудуйте дотичні до радіусів кола.

Вписаного чотирикутника (квадрата)

1. Побудуйте довільне коло.
2. Проведіть перпендикулярні діаметри цього кола.
3. Через точки перетину кола з діаметрами побудуйте квадрат.
4. Отримали вписаний квадрат.

Описаного навколо кола правильного чотирикутника (квадрата)

1. Побудуйте довільне коло.
2. Проведіть перпендикулярні діаметри цього кола.
3. Отримали точки перетину кола і діаметрів.
4. Проведіть дотичні до кола в точки перетину діаметрів кола і кола. Отримали описаний квадрат.

https://www.youtube.com/watch?time_continue=57&v=HX5I-ViuGq0 - побудова правильного шестикутника

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Який многокутник називають правильним?
2. Що називають центральним кутом многокутника?
3. Які правильні многокутники можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки?
4. Хто перший розв'язав задачу побудови 17-кутника?
5. Як побудувати правильний чотирикутник?
6. Як побудувати правильний трикутник та правильний шестикутник?
7. Як побудувати правильний 5-кутник та правильний 10-кутник?
8. За якою формулою можна обчислити довжину сторони правильного вписаного многокутника?
9. Як побудувати $2n$-кутник?
10. Чи можна за допомогою циркуля і лінійки вписати в коло правильний 170- кутник?
11. З'ясувати, чи можна за допомогою циркуля і лінійки розбити коло на 257 рівних дуг?

ТЕСТУВАННЯ №4

1. Обчислити центральний кут правильного 24-кутника

а) 10^0 б) 15^0 в) 20^0 г) 25^0 д) інша

2. Центральний кут якого правильного многокутника дорівнює 30^0

а) 30-кутника б) 25-кутника в) 20-кутника г) 15-кутника д) інша

3.Знайти довжину сторони 12-кутника, якщо $R=1$

а) $2+\sqrt{3}$ б) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ г) $2-\sqrt{3}$ д) інша

4. Правильний вписаний 6-кутник будують за допомогою

а) діаметрів б)хорд, довжина яких утричі менше довжини діаметра в) хорд, довжина яких удвічі більше довжини діаметра г) радіусів д) інша

5. Правильний описаний 8-кутник будують за допомогою

а) радіусів б)паралельних хорд в)перпендикулярних діаметрів г) кутів д) інша

6. Побудова правильного вписаного 5-кутника починається з розбиття кола на n рівних частин

а) $n=5$ б) $n=10$ в) $n=15$ г) $n=20$ д) інша

7. Побудова правильного описаного 16-кутника починається з розбиття кола на n рівних частин

а) $n=2$ б) $n=4$ в) $n=8$ г) $n=16$ д) інша

8. Кількість рівних частин, на яке можна розбити коло, дорівнює

а) 2^{2^k} б) $2^{2^k}+1$ в) 2^m г) $2^m\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_q$ д) інша

9. Знайти радіус описаного кола, якщо довжина сторони вписаного правильного 10-кутника дорівнює $\sqrt{5}-1$

а) 4 б) 3 в) 2 г) 1 д) інша

10. З'ясувати, чи можна вписати в коло правильний 30-кутник ?

а) так б) ні в) за певних умов г) не існує д) інша

Відповіді до тесту:

1. Б 2. А 3. Г 4. Г 5. В

6. Б 7. Б 8. Г 9. В 10. А

САМОСТІЙНА РОБОТА №3

ВАРІАНТ 1

1. За відомою стороною $a_n = 2$ знайти R, якщо $n = 8$
2. За відомим радіусом $R = 2$, знайти a_{12}
3. Побудувати правильний 12-кутник.

ВАРІАНТ 2

11. За відомим радіусом $R = 3$, знайти a_8
12. За відомою стороною $a_n = 3$ знайти R, якщо $n = 12$
13. Побудувати правильний 8-кутник.

20-30 хвилин

УРОК 4
«ДОВЖИНА КОЛА Й ДУГИ КОЛА. ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН»

Довжина кола

Щоб наочно уявити, що таке довжина кола, уявимо, що коло зроблено з тонкого дроту. Якщо таке коло розрізати в деякій точці A і розпрямити коло, то одержимо відрізок AA1, довжина якого і є довжиною кола (рис. 1).

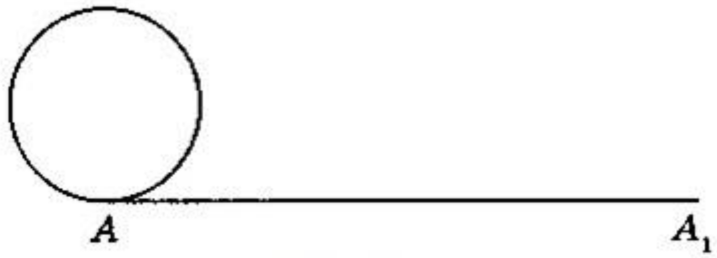


Рис. 1

Периметр будь-якого правильного вписаного в коло многокутника є наближеним значенням довжини кола. Чим більше число сторін такого многокутника, тим точніше це наближення, оскільки многокутник при збільшенні числа сторін все ближче і ближче «прилягає» до кола.

Теорема. Відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.

Доведення

Нехай маємо два довільних кола (рис. 2), радіуси яких дорівнюють R1 і R2, а довжини кіл — C1 і C2. У кожне з цих кіл впишемо правильні n-кутники з однаковим числом сторін, довжини яких дорівнюють an і a'n, тоді їх периметри Pn і P'n відповідно дорівнюватимуть: Pn = nan = n · 2R1sin $\frac{180^\circ}{n}$, P'n = na'n = n · 2R2sin$\frac{180^\circ}{n}$.

Тоді $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R_1}{2R_2}$.

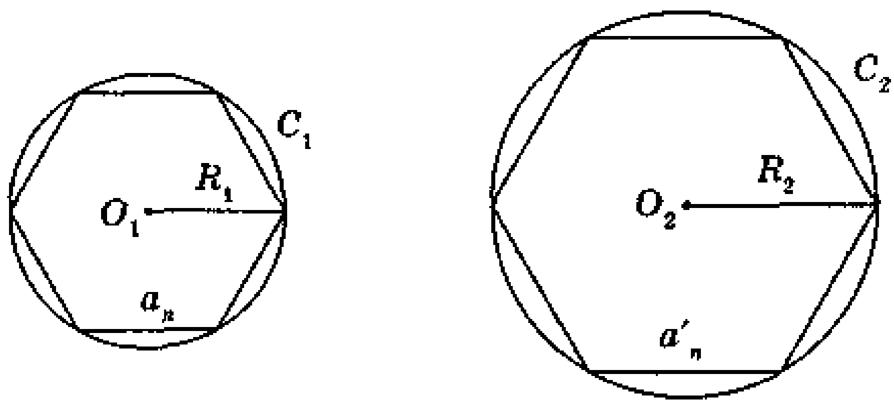


Рис. 2

Якщо значення n необмежено збільшувати, то периметри Pn і P'n прямуватимуть до довжин кіл C1 і C2, а відношення периметрів – до відношення $\frac{C_1}{C_2}$. Отже, $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, або $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$, що і треба було довести.

Відношення довжини кола C до його діаметра 2R прийнято позначати грецькою буквою π. Число π — ірраціональне число, його наближене значення π ≈ 3,1415926.

Отже, $\frac{C}{2R} = \pi$, звідки C = 2πR.

C = 2πR — формула довжини кола.

Приклад 1. Знайдіть довжину кола радіуса 5 см.

Розв'язання. C = 2πR≈2·3,14·5=31,4 (см)

Приклад 2. Знайдіть довжину кола діаметра 5 см.

Розв'язання. R=d/2=5/2=2,5 (см). C = 2πR≈2·3,14·2,5=15,7 (см)

Знаходження довжини дуги кола

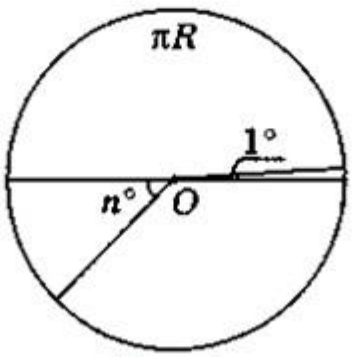


Рис. 3

Знайдемо довжину дуги кола, яка відповідає центральному куту n°. Оскільки розгорнутому куту відповідає довжина півкола πR (рис. 3), то куту 1° відповідає дуга довжиною $\frac{\pi R}{180}$, а куту n° — дуга довжиною $l = \frac{\pi R n}{180}$.

Приклад 1. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 1 см, яка відповідає центральному куту, що становить: а) 30°; б) 270°.

Розв'язання

а) $l_1 = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{6} \approx \frac{3{,}14}{6} \approx 0{,}52$ (см);

б) $l_2 = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 270}{180} = \frac{3\pi}{2} \approx \frac{3 \cdot 3{,}14}{2} \approx 4{,}71$ (см);

Відповідь. 0,52 см; 4,71 см.

Приклад 2. Скільки градусів містить центральний кут, якщо відповідна йому дуга становить:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{2}{3}$ кола?

Розв'язання

$\frac{1}{3}\cdot 360° = 120°$; $\frac{1}{5}\cdot 360° = 72°$; $\frac{2}{3}\cdot 360° = 240°$.

Відповідь. 120°, 72°, 240°.

Приклад 3. За даним радіусом R = 1 м знайдіть довжину дуги, яка відповідає центральному куту, що становить:

а) 45°; б) 120°; в) 60°30'; г) 150°36'.

Розв'язання

а) $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi\cdot 1\cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$ (м);

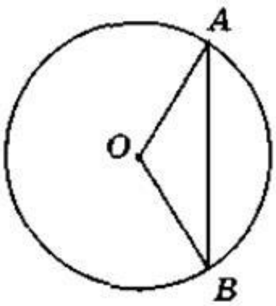
б) $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi\cdot 1\cdot 120}{180} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ (м);

в) $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi\cdot 1\cdot 60{,}5}{180} = \frac{\pi\cdot 60{,}5}{180} \approx 1{,}05$ (м);

г) $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi\cdot 1\cdot 150{,}6}{180} = \frac{\pi\cdot 150{,}6}{180} \approx 2{,}63$ (м).

Відповідь. ≈ 0,79 м; ≈ 2,09 м; ≈ 1,05 м; ≈ 2,63 м.

Приклад 4. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, якщо градусна міра дуги дорівнює 120°.



Розв'язання

Нехай AB = a, ∠AOB = 120°, OA = OB = R. За теоремою косинусів маємо:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cdot AO\cdot BO\cdot\cos\angle AOB$;

$a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 120°$; $a^2 = 2R^2 + R^2$;

$a^2 = 3R^2$; $R^2 = \frac{a^2}{3}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

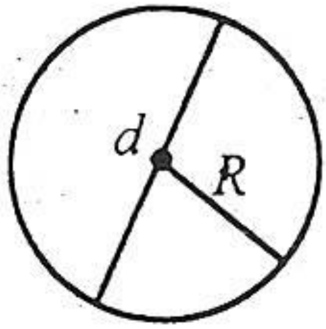
Тоді $l_{AB} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot 120}{180} = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Відповідь. $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$.

Площа круга та його частин

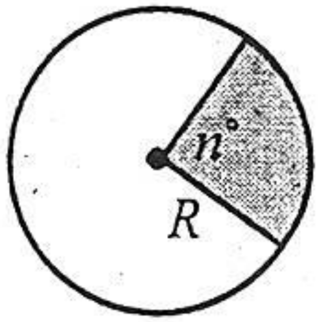
Площа круга обчислюється за формулами:

$$S = \pi R^2 \text{ або } S = \frac{\pi d^2}{4},$$

де R – радіус круга, d – його діаметр.



Круговим сектором називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута.

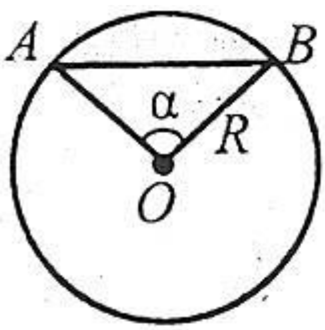


Площа сектора може бути обчислена за формулою $S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$, де n° – градусна міра дуги сектора.

Круговим сегментом називається спільна частина круга і півплощини.

Якщо круг перетнути прямою, то він ділиться на два кругових сегменти.

Площу кругового сегмента можна обчислити за формулою: $S_{kr.segm} = S_{kr.sectora} \pm S_{\Delta AOB}$, причому при $\alpha<180^\circ$ беремо знак «-», а при $\alpha>180^\circ$ – знак «+».



Приклад 1. Радіуси кіл стрілецької мішені дорівнюють 1,2,3 і 4. Знайдіть площу кожного з трьох кілець мішені.

Розв'язання.

Дано: кола з радіусами $R_1 = OD = 4$, $R_2 = OC = 3$, $R_3 = OB = 2$, $R_4 = OA = 1$.

Знайти: площі кілець 1, 2, 3.

Розв'язок: За умовою задачі кола з радіусами $R_1 = 4$, $R_2 = 3$, $R_2 = 2$, $R_4 = 1$.

Щоб знайти площу першого кільця,

$S_1 = S'_{\text{круга}} - S''_{\text{круга}}$, де $S'_{\text{круга}}$ — площа круга з $R_1 = 4$, а $S''_{\text{круга}}$ — площа круга з $R_2 = 3$.

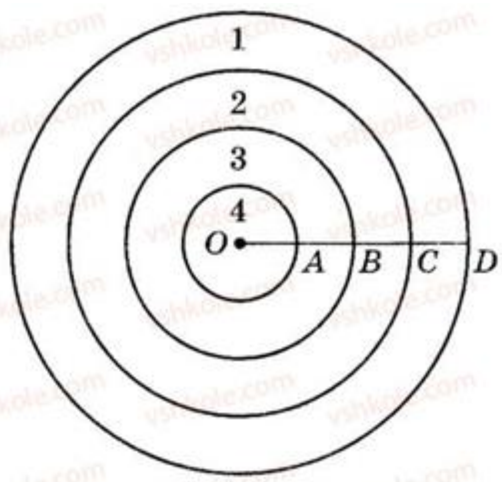
$S_1 = \pi(R_1^2 - R_2^2)$; $S_1 = \pi \cdot (4^2 - 3^2) = 7\pi$.

Аналогічно: $S_2 = \pi(R_2^2 - R_3^2)$;

$S_2 = \pi \cdot (3^2 - 2^2) = 5\pi$.

$S_3 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$; $S_3 = \pi \cdot (2^2 - 1^2) = 3\pi$.

Відповідь: 7π, 5π, 3π.



Приклад 2. Знайдіть площу круга, обмеженого колом описаним навколо рівнобедреного трикутника з основою 48 см і проведеною до неї медіаною 32 см.

Розв'язання.

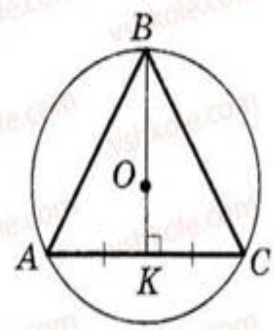
а) *Дано:* $\triangle ABC$, $AB = BC$, круг описаний навколо $\triangle ABC$, BK — медіана, $BK = 32$ см, $AC = 48$ см.

Знайти: $S_{\text{круга}}$.

Розв'язок: $S_{\text{круга}} = \pi R^2$, $R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}}$.

За умовою в $\triangle ABC$: $AB = BC$, BK — медіана, отже, за властивістю BK — висота, $BK = 32$ см, $AC = 48$ см.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BK \cdot AC$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 48 = 768$ см^2.



Розглянемо $\triangle ABK$: $\angle K = 90°$, $AK = \dfrac{1}{2}AC$; $AK = 24$ см. За теоремою Піфагора:

$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2}$; $AB = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ см.

$R = \dfrac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot 768} = 25$ см; $S_{\text{круга}} = 25^2 \cdot \pi = 625\pi$ см^2.

Відповідь: 625π см^2.

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

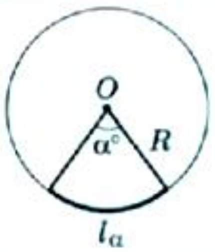
Формули для кола і круга та їх частин

Теорема про відношення довжини кола до його діаметра
Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто те саме для будь-яких двох кіл: $\frac{C}{2R} = \pi \approx 3{,}14$.

Довжина кола
$C = 2\pi R$

Площа круга
$S = \pi R^2$

Круговим сектором називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута



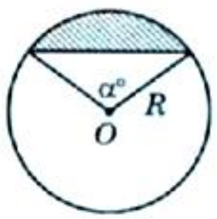
Довжина дуги

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$

Площа кругового сектора

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

Круговим сегментом називається частина круга, яка лежить по один бік від прямої, що перетинає даний круг



Площа сегмента, меншого за півкруг

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha - S_\triangle$$

Площа сегмента, більшого за півкруг

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha + S_\triangle$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ:

1. Чому дорівнює відношення довжини кола до діаметра?
2. Запишіть формули для знаходження:
   а) довжини кола;
   б) довжини дуги кола, що відповідає куту n°.
   в) площі круга;
   г) площі сектора;
   д) площі сегмента.

ТЕСТУВАННЯ №5

1. Знайдіть довжину кола, яке обмежує круг площею 36π см^2.

А) 6π см Б) 24π см В) 9π см Г) 12π см Д) 27π см

2. Знайдіть довжину кола, яке обмежує круг площею 25π см.^{2}

А) 10π см Б) 5π см В) 25π см Г) 15π см Д) 20π см

3. Радіус кола дорівнює 27 см. Знайдіть довжину дуги цього кола, градусна міра якої становить 25^0

А) $\frac{45\pi}{2}$ см Б) $\frac{45\pi}{4}$ см В) $\frac{15\pi}{4}$ см Г) $\frac{15\pi}{2}$ см Г) $\frac{30\pi}{4}$ см

4. Радіус круга дорівнює 12 см. Знайдіть площу сектора цього круга, якщо градусна міра його дуги дорівнює 75^0

А) 15π см^2 Б) 30π см^2 В) 45π см^2 Г) 60π см^2 Д) 75π см^2

5. Чому дорівнює площа круга, якщо його радіус 10 см

А) 10π см^2 Б) 100π см^2 В) 5π см^2 Г) 25π см^2 Д) 30π см^2

Відповіді до тесту:

1. Г 2. А 3. В 4. Б 5. Б

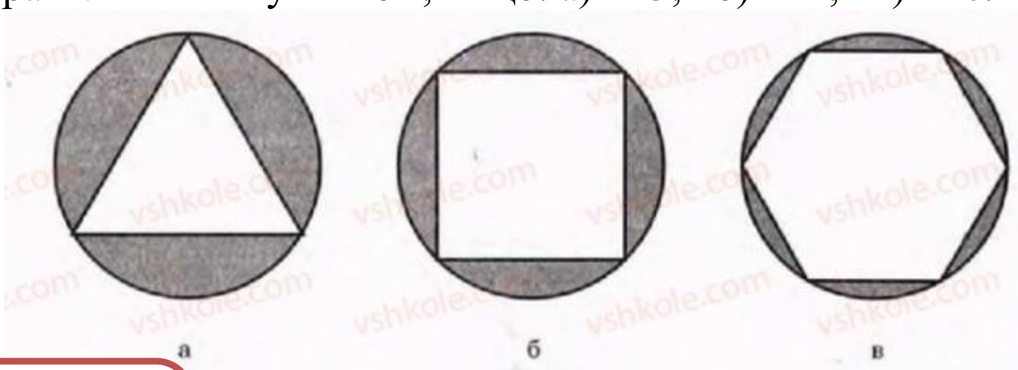
САМОСТІЙНА РОБОТА №4

1. Довжина кола, описаного навколо квадрата, дорівнює 6π см. Знайдіть сторону цього квадрата.

2. Шків діаметра 1,4 м здійснює 80 обертів за хвилину. Знайдіть швидкість точки на ободі шківа.

3. За довжиною дуги *l* знайдіть її хорду, якщо дуга становить 120°.

4. Знайдіть площу кожного із сегментів, що лежать поза вписаним у коло радіуса R правильним n-кутником, якщо: а) n=3; б) n=4; в) n=6.



20-30 хвилин

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. КОЛО ТА КРУГ.

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 виберіть одну правильну відповідь

1. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює:

Варіант 1 $10°$ ***Варіант 2*** $15°$

А) 12 сторін	Б) 18 сторін	В) 24 сторони	Г) 36 сторін

2. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного n-кутника, якщо :

Варіант 1 n=18 ***Варіант 2*** n=15

А) 150°	Б) 156°	В) 160°	Г) 165°

3. Знайдіть градусну міру дуги кола, радіус якого становить 12 см, а довжина дуги дорівнює:

Варіант 1 2π см. ***Варіант 2*** 3π см.

А) 15°	Б) 30°	В) 45°	Г) 60°

4. Знайдіть площу кругового сектора радіуса 10 см, центральний кут якого, дорівнює:

Варіант 1 $36°$ ***Варіант 2*** $72°$

А) 5π см^2	Б) 10π см^2	В) 20π см^2	Г) 40π см^2

5. Знайдіть площу круга, якщо довжина кола, що його обмежує, дорівнює:

Варіант 1 6π см ***Варіант 2*** 4π см

А) 2πсм^2	Б) 3πсм^2	В) 4πсм^2	Г) 9π см^2

Достатній рівень (4 бали)

Розв'яжіть завдання 6,7.

Зробіть відповідний малюнок, запишіть коротко умову та розв'язок у зошит.

6. Знайдіть довжину кола, описаного навколо:

Варіант 1

правильного чотирикутника, периметр якого дорівнює 12 см.

Варіант 2

правильного шестикутника, периметр якого дорівнює 12 см.

*Відповідь:*____

Варіант 1

7. У квадрат зі стороною 4см вписано коло, у яке вписано рівносторонній трикутник. Знайдіть площу трикутника.

Варіант 2

7. Навколо квадрата зі стороною $4\sqrt{2}$ см описано коло, навколо якого описано рівносторонній трикутник. Знайдіть периметр трикутника.

*Відповідь:*____

Високий рівень (3 бали)

Розв'яжіть завдання 9.

Розв'язання має містити малюнок, дано та обґрунтування (послідовні логічні дії та пояснення)

Варіант 1

8. Круг діаметром 10 см описаний навколо прямокутного трикутника з гострим кутом 60^{o}. Знайдіть площу сегмента, який відтинаються меншим катетом трикутника.

Варіант 2

8. Площа кругового сектора дорівнює 12π см^2. Хорда ділить цей сектор на круговий сегмент і рівнобедрений трикутник з кутом при основі 30^{o} . Знайдіть площу цього кругового сегмента.

*Відповідь:*____

45-60 хвилин

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. КОЛО ТА КРУГ.

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 виберіть одну правильну відповідь

1. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного n-кутника, якщо :

Варіант 3	***Варіант 4***
n=24	n=20

А) 160°	Б) 162°	В) 164°	Г) 165°

2. Знайдіть площу круга, якщо довжина кола, що його обмежує, дорівнює:

Варіант 3	***Варіант 4***
10π см	8π см

А) 8π см^2	Б) 10π см^2	В) 16π см^2	Г) 25π см^2

3. Знайдіть довжину дуги кола, радіус якого дорівнює 12 см, а градусна міра дуги дорівнює:

Варіант 3	***Варіант 4***
45°	15°

А) πсм	Б) 2πсм	В) 3πсм	Г) 4π см

4. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює:

Варіант 3	***Варіант 4***
40°	60°

А) 6 сторін	Б) 7 сторін	В) 8 сторін	Г) 9 сторін

5. Знайдіть градусну міру кругового сектора, радіус якого становить 10 см, якщо його площа дорівнює:

Варіант 3	***Варіант 4***
5π см^2	10π см^2

А) 18°	Б) 27°	В) 36°	Г) 72°

Достатній рівень (4 бали)

Розв’яжіть завдання 6,7.

Зробіть відповідний малюнок, запишіть коротко умову та розв’язок у зошит.

6. Знайдіть довжину кола, вписаного в:

Варіант 3

правильний трикутник, периметр якого дорівнює $12\sqrt{3}$ см.

Варіант 4

правильний шестикутник, периметр якого дорівнює 12 см.

*Відповідь:*____

Варіант 3

7. Навколо квадрата зі стороною $2\sqrt{2}$ см описано коло, навколо якого описано рівносторонній трикутник. Знайдіть периметр трикутника.

Варіант 4

7. У квадрат зі стороною 16 см вписано коло, у яке вписано рівносторонній трикутник. Знайдіть площу трикутника.

*Відповідь:*____

Високий рівень (3 бали)

Розв’яжіть завдання 9.

Розв’язання має містити малюнок, дано та обґрунтування

(послідовні логічні дії та пояснення)

Варіант 3

8. Круговий сектор спирається на дугу, довжина якої дорівнює 10π см. Хорда, яка стягує цю дугу, ділить цей сектор на круговий сегмент і рівнобедрений трикутник з кутом при основі 15° . Знайдіть площу кругового сегмента

Варіант 4

8. Круг діаметром 16 см описаний навколо прямокутного трикутника з гострим кутом 60°. Знайдіть площу сегмента, який відтинаються меншим катетом трикутника.

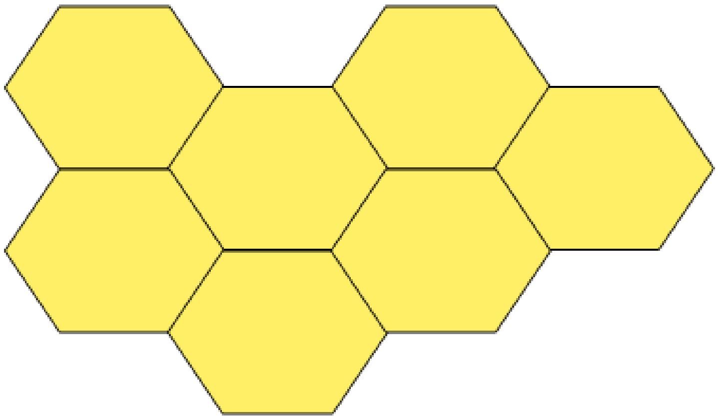
*Відповідь:*____

45-60

хвилин

КОЛИ УРОКИ ЗРОБЛЕНІ

А зараз ми взнаємо з вами чому можна дивуватися дивлячись на світ. Чому бджоли «вибрали» собі для комірок на сотах форму правильного шестикутника?



Із всіх правильних многокутників тільки трикутниками, квадратами і шестикутниками можна заповнити площину без пробілів і накладань.

Так як в цьому випадку сума кутів, що сходяться в одній вершині, дорівнює 360˚

$$(60^\circ \cdot 6=360^\circ;\ 90^\circ \cdot 4=360^\circ;\ 120^\circ \cdot 3=360^\circ).$$

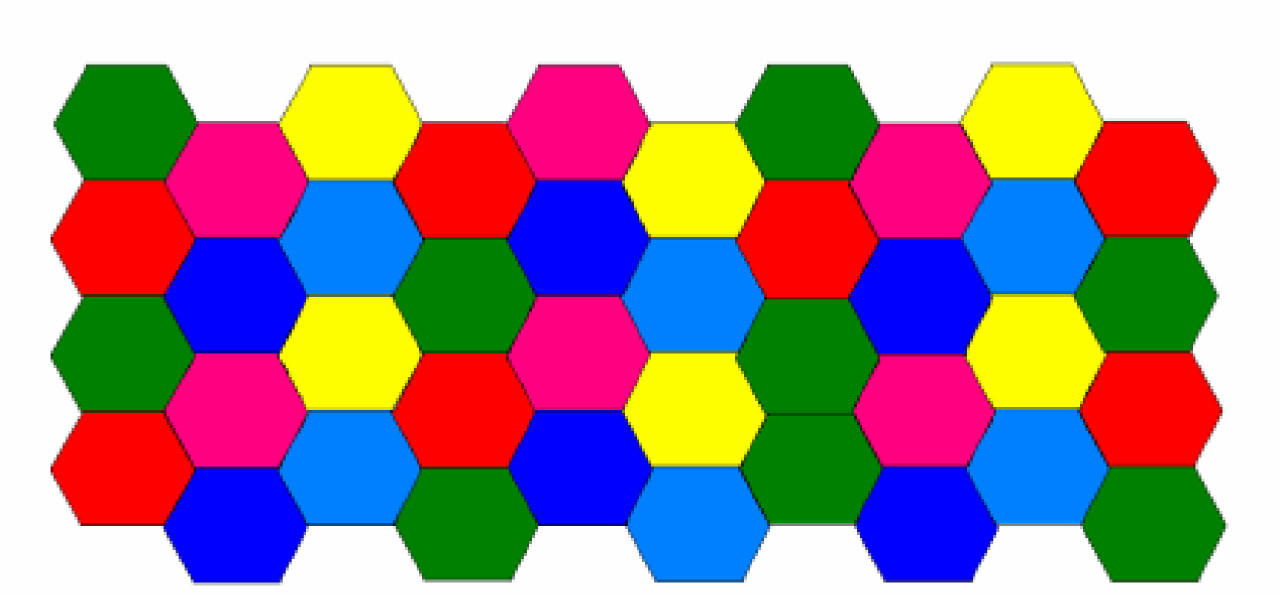
Ось чому бджоли повинні « вибрати» одну із цих фігур

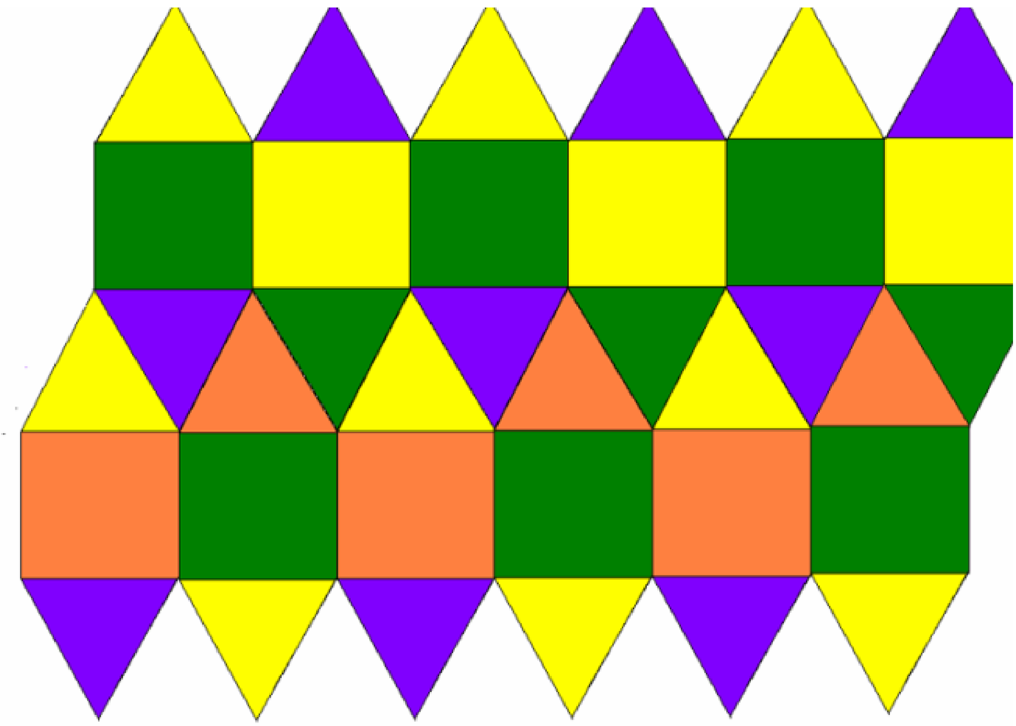
Висновок: Будуючи шестикутні комірки бджоли більш економно використовують площу всередині невеликого вулика і воск для виготовлення комірок.

Чарльз Дарвін відмічав: «Далее этой ступени совершенства в архитектуре естественный отбор не мог вести, потому что соты пчёл абсолютно совершенны с точки зрения экономии труда и воска»

Де людина може використовуючи властивість правильних многокутників, покривати площину без просвітів?

При складанні різних орнаментів, паркетів. Якщо розташувати різні фігури одну біля одної в деякій послідовності , можна одержати дуже красиві орнаменти. Такі орнаменти любили стародавні римляни, які прикрашали ними стіни та стелю своїх будинків. Орнаменти із мозаїки зустрічаються і в наші дні. Ними прикрашають не тільки стіни, стелю, але і підлогу. Орнамент, який покриває підлогу називається паркетом. Але паркет можна викласти не тільки із прямокутних дощечок, а і із різних правильних многокутників з однаковими сторонами, якщо їх викладати в певному порядку.





ВІДПОВІДІ

Самостійна робота №1

1) Скільки сторін має правильний многокутник, кожний із внутрішніх кутів якого дорівнює 135°?

Розв'язання

Оскільки $\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$ = 135°, то 180 · (n – 2) = 135n; 180n – 360 = 135n; 180n – 135n = 360; 45n = 360; n = 360 : 45, n = 8.

Відповідь. 8 сторін.

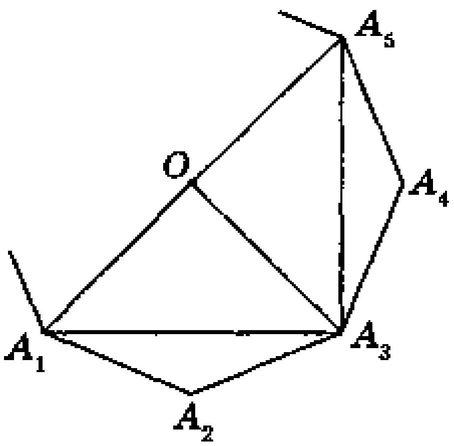
2) Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожний із зовнішніх його кутів дорівнює 24°?

Розв'язання

Оскільки $\frac{360^\circ}{n}$ = 24°, то 360 = 24n; n = 360 : 24, n = 15.

Відповідь. 15 сторін.

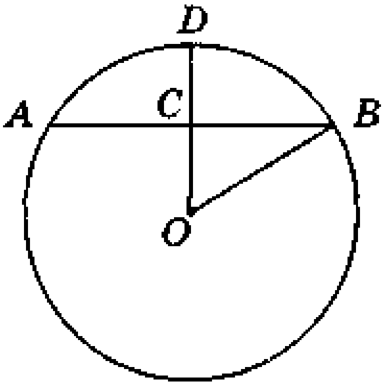
3) Доведіть, що взяті через одну вершини правильного 2п-кутника є вершинами правильного п-кутника.



Доведення

A1A2A3...A2n — даний 2п-кутник, точка О — його центр (рис. 73). Сполучивши вершини A1, A2, A3, ..., A2n-1, A1, отримаємо многокутник A1A3A5...A2п-1. Доведемо, що він правильний. ΔA1OA3 = ΔA3OA5 = ... = ΔA2n-1OA1, оскільки A1O = A3O = A5O = ... = A2n-1O; ∠A1OA3 = ∠A3OA5 =... = ∠A2n-1OA1 = 2∠A1OA2. Із рівності цих трикутників маємо: A1A3 = A3A5 = ... = A2n-1A1 і ∠A1A3A5 = ∠A3A5A7 = ... = ∠A2n-1A1A3 = 2∠OA1A3. Отже, многокутник A1A3A5...A2n-1 є правильним.

Самостійна робота №2



1. Хорда, яка перпендикулярна до радіуса й проходить через його середину, дорівнює стороні правильного вписаного трикутника. Доведіть це.

Доведення

Нехай AB ⊥ OD,DC = CO (рис. 79). У прямокутному трикутнику ВОС катет СО дорівнює половині гіпотенузи ВО. Нехай

BO = R, тоді CO = $\frac{R}{2}$,

AB = 2 · BC = 2 $\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}}$ = $\frac{2R\sqrt{3}}{2}$ = R $\sqrt{3}$.

Отже, довжина хорди дорівнює стороні правильного трикутника.

2. У правильного трикутника радіус вписаного кола вдвічі менший за радіус описаного кола. Доведіть це.

Доведення

Оскільки R = $\frac{a_3}{\sqrt{3}}$, a r = $\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$, то R : r = $\frac{a_3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a_3}$ =2, що і треба було довести.

3. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює а. Знайдіть сторону правильного шестикутника:

а) вписаного в це коло;

б) описаного навколо цього кола.

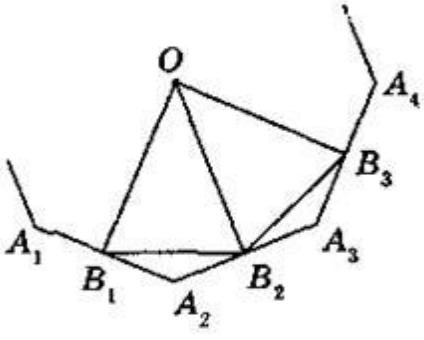
Розв'язання

Сторона правильного трикутника дорівнює а, отже, радіус описаного кола R = $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

а) Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює радіусу кола, описаного навколо шестикутника, і тому сторона цього шестикутника b = R = $\frac{a}{\sqrt{3}}$

б) Радіус кола, описаного навколо трикутника, є апофемою правильного шестикутника, і тому сторона цього шестикутника b = $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ = $\frac{2a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ = $\frac{2a}{3}$.

Відповідь: а) b = $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) b = $\frac{2a}{3}$.



4. Доведіть, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.

Доведення

Нехай $A_1A_2...A_n$ — даний правильний n-кутник (рис. 74), точка O — його центр. B_1, B_2, ..., B_n — середини сторін A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1.

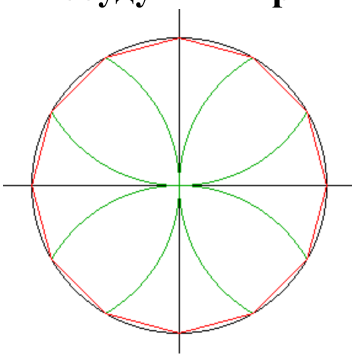
Тоді $OB_1 = OB_2 = ... = OB_n$ — як радіуси вписаного кола в многокутник $A_1A_2...A_n$ і $\angle B_1OB_2 = \angle B_2OB_3 = ... = \angle B_nOB_1 = 2\angle B_1OA_2$. Рівнобедрені трикутники B_1OB_2, B_2OB_3,..., B_nOB_1 рівні за двома сторонами і кутом між ними. Із рівності трикутників маємо: $B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_nB_1$ і $\angle B_1B_2B_3 = \angle B_2B_3B_4 = ... = \angle B_nB_1B_2 = 2\angle OB_1B_2$. Отже, n-кутник $B_1B_2...B_n$ - правильний.

Самостійна робота №3

Варіант 1

1. **За відомою стороною** $a_n = 2$ **знайти** R**, якщо** $n = 8$ ($R = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$)
2. **За відомим радіусом** $R = 2$**, знайти** a_{12} ($a_{12} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$)
3. **Побудувати правильний 12-кутник.**

Розв'язання

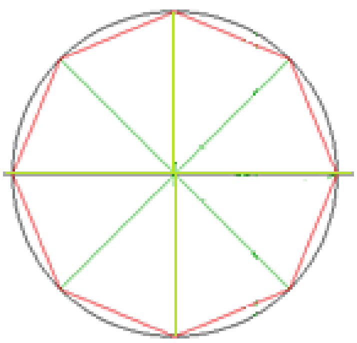


1. Побудувати коло.
2. Провести дві взаємно перпендикулярні прямі.
3. Провести чотири дуги, радіусом як і у побудованого кола, з центром у точках перетину прямих із колом.
4. Послідовно з'єднати всі точки, що знайшлись на колі при виконанні допоміжних побудов.

Варіант 2

1. **За відомим радіусом** $R = 3$**, знайти** a_8 ($a_8 = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}$)
2. **За відомою стороною** $a_n = 3$ **знайти** R**, якщо** $n = 12$ ($R = 3\sqrt{2+\sqrt{3}}$)
3. **Побудувати правильний 8-кутник.**

Розв'язання



1. Побудувати коло.
2. Провести дві взаємно перпендикулярні прямі. Отримуємо перші чотири вершини правильного восьмикутника
3. Наступні чотири вершини отримаємо шляхом побудов бісектрис отриманих прямих кутів.
4. Послідовно з'єднати всі точки, що знайшлись на колі при виконанні допоміжних побудов.

Самостійна робота №4

1. Довжина кола, описаного навколо квадрата, дорівнює 6π см. Знайдіть сторону цього квадрата. (Відповідь. $3\sqrt{2}$ см.)

2. Шків діаметра 1,4 м здійснює 80 обертів за хвилину. Знайдіть швидкість точки на ободі шківа.

Розв'язання

Довжина шківа: C = 2πR = π · 1,4 = 4,396 (м). Шлях, пройдений точкою за хвилину: S = C · 80 = 4,396 · 80 = 351,68 (м).

Швидкість точки на ободі шківа:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{351{,}68\ м}{1\ хв} = 351{,}68\left(\frac{м}{хв}\right).$$

Відповідь. $351{,}68\ \frac{м}{хв}$.

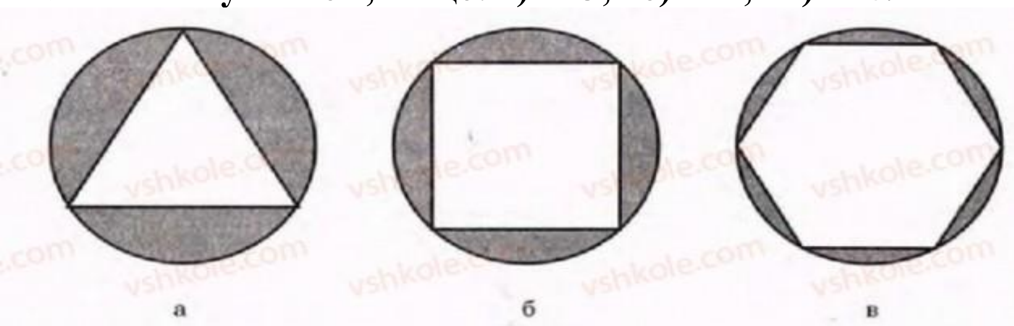
3. За довжиною дуги *l* знайдіть її хорду, якщо дуга становить 120°.

Розв'язання

Оскільки $l = \frac{\pi R n}{180}$, то $R = \frac{180l}{\pi n} = \frac{180l}{\pi \cdot 120} = \frac{3l}{2\pi}$. За теоремою косинусів: $AB^2=AO^2+BO^2-2\cdot AO\cdot BO\cdot\cos\angle AOB=R^2+R^2+R^2=3R^2=$ $=3\left(\frac{3l}{2\pi}\right)^2$. Звідси $AB = \frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.

Відповідь. $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.

4. Знайдіть площу кожного із сегментів, що лежать поза вписаним у коло радіуса R правильним n-кутником, якщо: а) n=3; б) n=4; в) n=6.



а)

Дано: круг, правильний трикутник, вписаний у круг.

Знайти: S (площу одного з сегментів, що лежить поза трикутником).

Розв'язок: Нехай S_1 — площа круга, S_2 — площа вписаного в нього правильного трикутника, тоді $S = (S_1 - S_2) : 3$.

$S_1 = \pi R^2$, де R — радіус круга. $S_2 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ (див. № 200).

$$S = \left(\pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right) : 3 = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4} : 3 = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Відповідь: $\dfrac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

б)

Дано: круг, описаний навколо квадрата.

Знайти: S.

Розв'язок: S, S_2 і S_2 — аналогічно а).

$$S = (S_1 - S_2) : 4;\ S_1 = \pi R^2;\ S_2 = 2R^2;\ S = (\pi R^2 - 2R^2) : 4 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2).$$

Відповідь: $\dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$.

в)

Дано: круг, описаний навколо правильного шестикутника.

Знайти: S.

Розв'язок: S, S_2 і S_1 — аналогічно а).

$$S = (S_1 - S_2) : 6;\ S_1 = \pi R^2;\ S_2 = \frac{6R^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S = \left(\pi R^2 - \frac{6R^2\sqrt{3}}{4}\right) : 6 = \frac{R^2}{24}(4\pi - 6\sqrt{3}) = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Відповідь: $\dfrac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

ГЛОСАРІЙ

Ламана — це фігура, яка складається з певної кількості точок і відрізків, що послідовно їх сполучають.

Точки називаються **вершинами** ламаної, а відрізки — **ланками** ламаної.

Замкнута ламана — ламана, у якої збігаються кінці.

Многокутник — це проста замкнута ламана. Вершини ламаної називаються **вершинами** многокутника, ланки ламаної — **сторонами** многокутника.

Діагоналі многокутника — це відрізки, що з'єднують несусідні вершини многокутника.

n-кутник — це многокутник з n вершинами.

Опуклий многокутник — многокутник, що лежить в одній півплощині щодо будь-якій прямої, яка містить його сторону.

Внутрішній кут опуклого многокутника при даній вершині — це кут між його сторонами, що сходяться в цій вершині.

Зовнішній кут опуклого многокутника — кут, суміжний внутрішньому куту многокутника при даній вершині.

Опуклий многокутник називається **правильним**, якщо всі його сторони рівні і рівні всі його кути.

Многокутник називається **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на деякому колі.

Многокутник називається **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються деякого кола.

Правильний опуклий многокутник є вписаним у коло й описаним навколо кола, при цьому **центри вписаного й описаного кіл** співпадають, і ця точка є центром правильного многокутника.

Якщо в правильному трикутнику з’єднати його центр відрізками з вершинами многокутника, то одержимо кути, які називаються **центральними кутами правильного многокутника**.

Коло — це фігура, що складається з усіх точок площини, відстань від яких до даної точки не більша від даної. Дана точка називається **центром кола**, а дана відстань — **радіусом кола**.

Відрізок прямої, що сполучає дві точки кола називається **хордою**. Найдовша з хорд, **діаметр**, проходить через центр кола. Діаметр кола дорівнює двом радіусам.

Площа круга геометрична фігура обмежена колом.

Круговий сектор — частина круга, що лежить усередині відповідного центрального кута.

Круговий сегмент — спільна частина круга й півплощини.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

- Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф., Єршов С.В. Геометрія 9 клас. Підручник для загальноосвітніх шкіл
- Погорелов А. В. Геометрія 7 – 11. Підручник для загальноосвітніх шкіл
- Роганін О.М. Геометрія 9клас: Розробки уроків
- Мережа Інтернет. Точки доступу:
  - http://karmanform.ucoz.ru
  - http://ito.vspu.net
  - http://subject.com.ua/lesson/mathematics/geometry9/
  - http://subject.com.ua/mathematics/zno/412.html
  - http://subject.com.ua/lesson/mathematics/geometry9/17.html